第八章 劳动力部门配置均衡

8.9 两市场共同均衡的数学证明

图 8.8 只是粗糙地表明了劳动市场和商品市场共同均衡的可能性。本节将从数学上严格证明该均衡。由于本节具有较强的独立性，所以本节的公式单独标号。注意劳动力在两部门的配置状况可以用农劳比表示，因此，农劳比均衡代表了两部门劳动配置的均衡。由于农劳比是两个存量的比率，所以农劳比均衡考虑的是农劳比在非农化转型过程中某一时点上的均衡，农劳比波动指的是在这一时点邻域的波动。[1]

I 若干基本假设

（1） 非农化转型是一个有起点和终点且起点和终点之间连续的历史过程，$\mathbf{t}$=(0, 1, 2, …, N)是非农化转型的实数时点集合，其中 N 是足够大的正整数。
（2） 经济体系分成农业和非农业两个部门
（3） 两类生产要素：劳动和资本
（4） 标准新古典生产函数
（5） 没有失业
（6） 总劳动给定
（7） 总资本给定
（8） 资本在两部门的配置给定
（9） 农产品消费比重给定
（10）农业工资取决于农业劳动平均产量、非农工资取决于非农劳动边际产量

II 模型

根据上述假设，该经济的实体部分可分为劳动、农产品、非农产品三个市场。依照瓦尔拉斯定律，若其中两个市场均衡，第三个市场必然均衡，所以下面仅仅考虑劳动市场和农产品市场的均衡，其中农产品市场往往又称为商品市场。在非农化转型过程中的某一时点 $t\in\mathbf{t}$，一经济的劳动市场和商品市场可以用下述模型来代表：

(8.9.1) $\mathbf{Y}_t = p^A_t Y^A_t + p^N_t Y^N_t$ （货币价格计量的总产出）

(8.9.2) $p_t = \dfrac{p^A_t}{p^N_t}$ （用非农产品计量的农产品相对价格）

(8.9.3) $Y_t = \dfrac{1}{p^N_t}\mathbf{Y}_t = p_t Y^A_t + Y_t^N$ （用非农产品计量总产出）

(8.9.4) $Y^A_t = f^A_t(\theta_t K_t, l_t L_t)$ （农业产量函数）

(8.9.5) $Y^N_t = f^N_t[(1-\theta_t)K_t, (1-l_t)L_t]$ （非农产量函数）

(8.9.6) $w^{A}{}_{t}=\dfrac{f^{A}{}_{t}}{l_{t}L_{t}}$ （农业产品工资）

(8.9.7) $w^{N}{}_{t}=\dfrac{df^{N}{}_{t}}{d[(1-l_{t})L_{t}]}$ （非农产品工资）

(8.9.8) $p_t w^{A}{}_{t} = w^{N}{}_{t}$ （劳动市场均衡条件）

(8.9.9) $p_t Y^{A}{}_{t} = \lambda_t Y_t$, （农产品市场均衡条件）

(8.9.10) $L_t = L_t^{\sim}$ （总劳动不变）

(8.9.11) $K_t = K_t^{\sim}$ （总资本不变）

(8.9.12) $\theta_t = \theta_t^{\sim}$ （资本部门配置不变）

(8.9.13) $\lambda_t = \lambda_t^{\sim}$ （农产品消费比重不变）

$\mathbf{Y}$ (>0): 总产出，Y^A(>0): 农业产量，Y^N(>0): 非农产量，p^A(≥0):农产品价格，p^N(≥0):非农产品价格，p (≥0): 用非农产品计量的农产品价格，Y (>0): 以非农产品计量的总产出, K (>0): 资本，L (>0): 劳动, $\theta\in(0, 1)$：农业资本比重，$l\in(0, 1)$: 农业劳动比重，w^A(>0)：农业工资率，w^N(>0): 非农工资率，$\lambda\in(0, 1)$: 农产品消费比重。注意 $\theta K=K^A$，$(1-\theta)K=K^N$。参数集 $(L_t, K_t, \theta_t, \lambda_t)\in(L, K, \theta, \lambda)$，解集 $(\mathbf{Y}_t, Y_t, Y^{A}{}_{t}, Y^{N}{}_{t}, p^{A}{}_{t}, p^{N}{}_{t}, p_t, l_t, w^{A}{}_{t}, w^{N}{}_{t})\in(\mathbf{Y}, Y, Y^A, Y^N, p^A, p^N, p, l, w^A, w^N)$，其中实体经济的解集为 $(Y_t, Y^{A}{}_{t}, Y^{N}{}_{t}, p_t, l_t, w^{A}{}_{t}, w^{N}{}_{t})\in(Y, Y^A, Y^N, p, l, w^A, w^N)$，核心解集为$(l_t, p_t)\in(l, p)$。

已知生产函数 f 为新古典生产函数，我们有 $f^{A}{}_{t}\in f, f^{N}{}_{t}\in f$, f 满足 Inada 条件，即 $f>0$, $f'>0$, $f''<0$, $f(x\to0)\to0$, $f(x\to\infty)\to\infty$, $f'(x\to0)\to\infty$, $f'(x\to\infty)\to0$。

III 求解

仅仅考虑由(8.9.3)至(8.9.13)组成的实体经济并求核心解集$(l_t, p_t)\in(l, p)$。为简便计，下面将略去时间下标。注意劳动市场方程为(8.9.6)、(8.9.7)与(8.9.8)。把(8.9.6)和(8.9.7)代入(8.9.8)并移项得到：

(8.9.14) $p^{L}=\dfrac{lL}{f^{A}(\theta K, lL)}\dfrac{df^{N}[(1-\theta)K,(1-l)L]}{d[(1-l)L]}$

其中上标 L 表示劳动市场。(8.9.14)对 l 求导得

(8.9.15) $\dfrac{dp^{L}}{dl}=\dfrac{L}{(f^{A})^{2}}(f^{A}\text{-}lL\dfrac{df^{A}}{d(lL)})\dfrac{df^{N}}{d[(1-l)L]}\text{ - }\dfrac{lL^{2}}{f^{A}}\dfrac{d^{2}f^{N}}{d[(1-l)L]^{2}}>0$

(8.9.15)大于零的原因是

$$f^{A}\text{-}lL\frac{df^{A}}{d(lL)}=f^{A}(1\text{- }lL\frac{df^{A}}{d(lL)}\ \frac{1}{f^{A}})=f^{A}(1\text{- }e^{A}{}_{L})>0,$$

$$\frac{d^2 f^{N}}{d[(1-l)L]^2}<0.$$

其中 $e^{A}{}_{L}\in(0, 1)$ 表示农业劳动的农业产量弹性。

展开农产品市场方程 (8.9.9) 并移项得

$$(8.9.16)\ p^{G}=\frac{\lambda}{1-\lambda}\frac{Y^{N}}{Y^{A}}=\gamma\frac{f^{N}[(1-\theta)K,(1-l)L]}{f^{A}(\theta K,lL)}$$

其中上标 G 表示商品市场且

$$(8.9.17)\ \gamma=\frac{\lambda}{1-\lambda}\qquad \gamma>0,\ \frac{d\gamma}{d\lambda}>0$$

由于均衡时 $p^{L}=p^{G}$，合并 (8.9.15) 与 (8.9.16) 得

$$(8.9.18)\ \frac{lL}{f^{A}(\theta K,lL)}\frac{df^{N}[(1-\theta)K,(1-l)L]}{d[(1-l)L]}=\gamma\frac{f^{N}[(1-\theta)K,(1-l)L]}{f^{A}(\theta K,lL)}.$$

消去 f^{A} 并整理得

$$(8.9.19)\ \frac{df^{N}[(1-\theta)K,(1-l)L]}{d[(1-l)L]}=\gamma\frac{f^{N}[(1-\theta)K,(1-l)L]}{lL}.$$

(8.9.19) 中只有一个变量 l，其余 L、K、θ 和 γ 皆是参数。设函数 $G(l)$且

$$(8.9.20)\ G(l)=\gamma\frac{f^{N}[(1-\theta)K,(1-l)L]}{lL}-\frac{df^{N}[(1-\theta)K,(1-l)L]}{d[(1-l)L]}.$$

$G(l)\in(-\infty,\infty)$连续且至少一次可微。显然，$G(l^{E})=0$ 表示 l^{E} 是(8.9.19)的解。下面证明 $l^{E}{}_{t}$ 的存在性、唯一性和稳定性。

IV 解的存在性

令

$$A=f^{N}[(1-\theta)K,(1-l)L],$$
$$B=lL,$$
$$C=\frac{df^{N}[(1-\theta)K,(1-l)L]}{d[(1-l)L]}.$$

若 $l\to0$, 则$(1-l)L\to L$, 我们有 $A\to I$ (I 是一很大的有限数), $B\to0$ 和 $C\to J$ (J 是一很小的有限数)，所以

$$G|_{l\to0}=\gamma\frac{A}{B}-C_t\to\infty.$$

若 $l\to1$, 则$(1-l)L\to0$, 我们有 $A\to0$, $B\to L$ and $C\to\infty$, 所以

$$G|_{l\to 1}=\gamma\frac{A}{B}-C_t \to -\infty.$$

因此，根据介值定理 (Intermediate Value Theorem), 在(l, G(l))坐标系上，l 在(0, 1)区间由小变大的连续过程中，G(l)肯定将由正数变成负数，即 G(l)必须与横轴相交，所以，在 $l\in(0,1)$中一定存在 $l^E\in l$ 使得 G(l^E)=0，l^E 便是 (8.9.19)的解。把 l^E 代入模型，我们将求出核心解集为$(l^E, p^E)\in(l, p)$和实体经济解集 $(Y^E, Y^{A,E}, Y^{N,E}, p^E, l^E, w^{A,E}, w^{N,E})\in(Y, Y^A, Y^N, p, l, w^A, w^N)$。

V 解的唯一性

对 G(l)求导得

$$(8.9.21)\quad \frac{dG}{dl}=\gamma\frac{1}{lL}\frac{df^N[(1-\theta)K,(1-l)L]}{d[(1-l)L]}(-L)-\gamma f^N[(1-\theta)K,(1-l)L]\frac{1}{(lL)^2}L$$

$$-\frac{d^2 f^N[(1-\theta)K,(1-l)L]}{d[(1-l)L]^2}(-L)<0$$

(8.9.21)小于零的原因是：

$$-\gamma\frac{1}{l}\frac{df^N[(1-\theta)K,(1-l)L]}{d[(1-l)L]}<0,$$

$$-\gamma L\frac{1}{(lL)^2}\ f^N[(1-\theta)K,(1-l)L]<0$$

和

$$L\frac{d^2 f^N[(1-\theta)K,(1-l)L]}{d[(1-l)L]^2}<0$$

由于(dG/dl)<0，因此 G(l)=是 l 的严格单调函数。它表示 G(l)仅仅在横轴的一个点上和横轴相交并在该点上仅仅相交一次，所以，在 $l\in(0,1)$中，有且仅有一个 $l^E\in l$ 使得 G(l)=0，l^E 是 G(l)也是 (8.9.19) 的唯一解。把 l^E 代入模型，我们将获得唯一一组核心解和实体经济解集。

VI 解的稳定性

设函数 l(t)的导数为

$$(8.9.22)\quad \frac{dl}{dt}=g(\gamma\frac{f^N}{lL}-\frac{df^N}{d[(1-l)L]})$$

其性质为：

(8.9.22a)　$g(0)=0$

(8.9.22b)　$g'>0$

注意 g 函数中的第 1 项是用相对价格加权的农业工资，第 2 项是非农工资，所以(8.9.22)描述的是 l 作为两部门工资差距的函数的动态波动。(8.9.22a)是直观结果。(8.9.22b) 表示若农业工资高于非农工资，l 将上升；反之则下降。将(8.9.22)在点 $l=l^E$ 展开为泰勒级数并取最初两项如下：

$$(8.9.23)\quad \frac{d(l-l^E)}{dt}=g(0)+(l-l^E)g'(0)\{d[\gamma\frac{f^N}{lL}-\frac{df^N}{d[(1-l)L]}]/dl\}$$

考虑到(8.9.22a), 我们有

$$(8.9.24)\qquad \frac{d(l-l^E)}{dt}=(l-l^E)\,g'(0)\{d[\gamma\frac{f^N}{lL}-\frac{df^N}{d[(1-l)L]}]/dl\}$$

(8.9.24)的通解为

$$(8.9.25)\quad l=l^E+[l(0)-l^E]\exp\{g'(0)\{d[\gamma\frac{f^N}{lL}-\frac{df^N}{d[(1-l)L]}]/dl\}t\}$$

其中 $l(0)$ 代表 l 在波动起点 t=0 时的值。由于 $g'(0)>0$ 且由(B 2.21)知

$$d[\gamma\frac{f^N}{lL}]/dl<0,$$

$$d[-\frac{df^N}{d[(1-l)L]}]/dl<0$$

可知 $\exp\{\cdot\}<0$，因此 l 将在波动中趋向于 l^E，l^E 是(8.9.19)的稳定解。把 l^E 代入模型求出的核心解集和实体经济解集也是稳定解集。

上述证明可以应用于农劳比在非农化转型中任意时点的均衡。所以，对任意 $t\in\mathbf{t}$, 模型的核心解可写为：

(8.9.26) $l^E_t = l^E_t(L_t, K_t, \theta_t, \lambda_t)$,

(8.9.27) $\underline{p}^E_t=p^E_t(L_t, K_t, \theta_t, \lambda_t)$。

将其写为更简洁的形式并用 Z 代表之：

(8.9.28) $Z_t=(L_t, K_t, \theta_t, \lambda_t; l_t, p_t)\in(L, K, \theta, \lambda; l, p)=Z$

其中分号前后分别为参数和核心解。Z_t 即相当于图 8.8 中的共同均衡点 A_t。

注释：

---

[1] 笔者曾经以非农比为指标研究过劳动市场和商品市场在农业劳动力转移过程中的共同均衡问题，参见胡景北，2011。